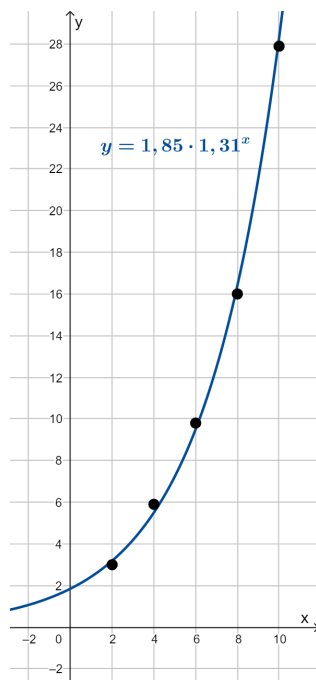


15.1

- a) Taulukoidaan mittaustulokset ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

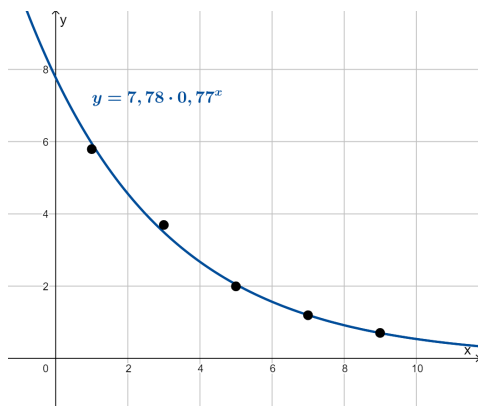
	A	B
1	x	y
2	2	3,0
3	4	5,9
4	6	9,8
5	8	16,0
6	10	27,9

Mittaustuloksia kuvaava eksponentiaalinen malli on $f(x) = 1,85 \cdot 1,31^x$.



- b) Taulukoidaan mittaustulokset ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	1	5,8
3	3	3,7
4	5	2,0
5	7	1,2
6	9	0,71



Mittaustuloksia kuvaava eksponentiaalinen malli on $f(x) = 7,78 \cdot 0,77^x$.

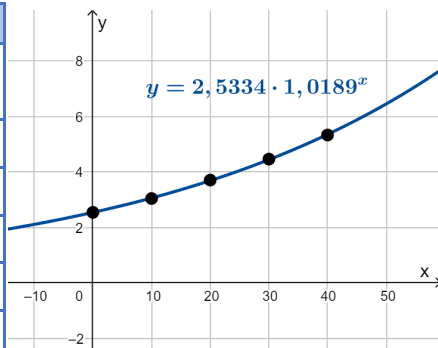
Vastaus

- a) $y = 1,85 \cdot 1,31^x$
b) $y = 7,78 \cdot 0,77^x$

15.2

- a) Muuttuja x on vuodesta 1950 kulunut aika vuosina ja muuttuja y maailman väkiluku miljardeina. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (v)	Väkiluku y (mrd. ihm.)
2	0	2,536
3	10	3,035
4	20	3,700
5	30	4,458
6	40	5,327



Maapallon väkilukua (miljardia ihmistä) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 2,5334 \cdot 1,0189^x,$$

missä x on vuodesta 1950 kulunut aika vuosina.

- b) Vuodesta 1950 vuoteen 2020 on $2020 - 1950 = 70$ vuotta.

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 70$ (vuotta).

$$f(70) = 2,5334 \cdot 1,0189^{70} = 9,39535... \approx 9,395 \text{ (mrd. kpl)}$$

Mallin mukaan vuonna 2020 maapallon väkiluku olisi 9,395 miljardia.

- c) Lasketaan, kuinka monta prosenttia suurempi ennuste on kuin maapallon todellinen väkiluku vuonna 2020.

$$\frac{9,395 - 7,794}{7,794} = 0,1704... = 17,04... \% \approx 20 \%$$

Mallin ennuste on noin 20 % suurempi kuin todellinen väkiluku.
Malli ei ole toimiva 2000-luvulla.

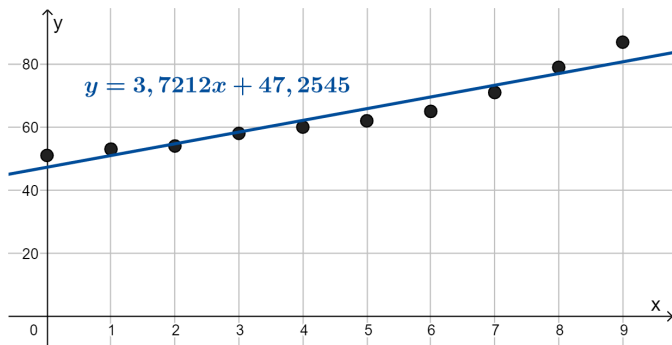
Vastaus

- a) $f(x) = 2,5334 \cdot 1,0189^x$
b) 9,395 miljardia
c) Ennuste on noin 20 % suurempi kuin todellinen asukasluku. Malli ei ole toimiva 2000-luvulla.

15.3

- a) Muuttuja x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina ja muuttuja y postissa lähetettyjen pakettien kokonaismäärän arvio miljoonina. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon lineaarinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (v)	Pakettien määrä y (milj. kpl)
2	0	51
3	1	53
4	2	54
5	3	58
6	4	60
7	5	62
8	6	65
9	7	71
10	8	79
11	9	87

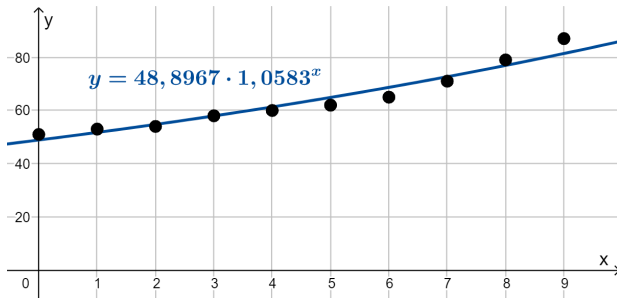


Pakettien määrää (milj. kpl) kuvaava lineaarinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 3,7212x + 47,2545,$$

missä x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina.

Sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.



Pakettien määrää (milj. kpl) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$g(x) = 48,8967 \cdot 1,0583^x,$$

missä x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina.

b) Lasketaan funktioiden f ja g arvot, kun $x = 15$ ja $x = 20$.

Lineaarinen malli $f(x)$:

$$f(15) = 3,7212 \cdot 15 + 47,2545 = 103,0725 \approx 103 \text{ (milj. kpl)}$$

$$f(20) = 3,7212 \cdot 20 + 47,2545 = 121,6785 \approx 122 \text{ (milj. kpl)}$$

Lineaarisen mallin mukaan postipaketteja lähetetään 103 miljoonaa kappaletta vuonna 2025 ja 122 miljoonaa kappaletta vuonna 2030.

Eksponentiaalinen malli $g(x)$:

$$g(15) = 48,8967 \cdot 1,0583^{15} = 114,396... \approx 114 \text{ (milj. kpl)}$$

$$g(20) = 48,8967 \cdot 1,0583^{20} = 151,864... \approx 152 \text{ (milj. kpl)}$$

Eksponentiaalisen mallin mukaan postipaketteja lähetetään 114 miljoonaa kappaletta vuonna 2025 ja 152 miljoonaa kappaletta vuonna 2030.

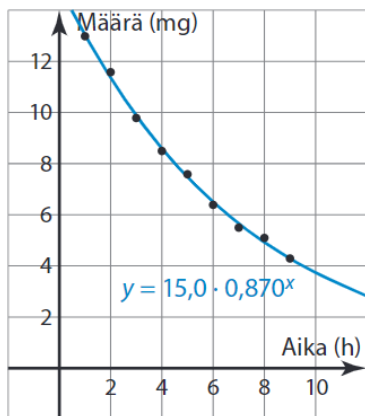
Vastaus

a) $f(x) = 3,7212x + 47,2545,$

$$g(x) = 48,8967 \cdot 1,0583^x$$

- b)** lineaarinen malli: 103 miljoonaa ja 122 miljoonaa,
eksponentiaalinen malli: 114 miljoonaa ja 152 miljoonaa

15.4



a) Lääkeaineen määrää (mg) kuvaava eksponentiaalinen malli on

$$f(x) = 15,0 \cdot 0,870^x,$$

missä x on seurannan aloittamisesta kulunut aika tunteina.

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 4,5$ (h).

$$f(4,5) = 15,0 \cdot 0,870^{4,5} = 8,015... \approx 8,0 \text{ (mg)}$$

Mallin mukaan lääkeainetta on elimistössä noin 8,0 mg, kun seurannan aloittamisesta on kulunut 4,5 tuntia.

b) Lasketaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on $5,0$ (mg).

$$f(x) = 5,0$$

$$f(x) = 15,0 \cdot 0,870^x.$$

$$15,0 \cdot 0,870^x = 5,0$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 7,888...$$

$$x \approx 7,9 \text{ (tuntia)}$$

Mallin mukaan lääkeaineen määrä elimistössä on alle $5,0$ mg, kun on seurannan aloittamisesta on kulunut noin $7,9$ tuntia.

Vastaus

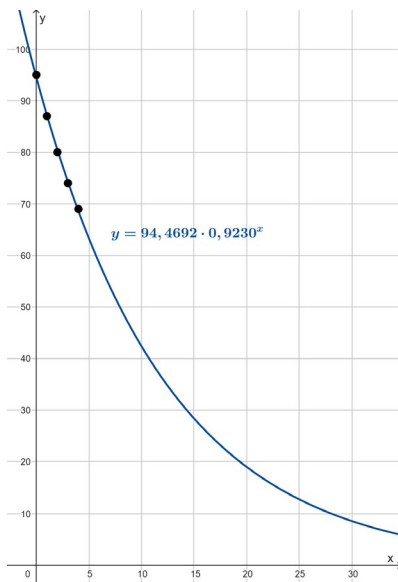
a) $8,0$ mg

b) $7,9$ tunnin

15.5

Muuttuja x on seurannan alusta kulunut aika minuutteina ja muuttuja y kahvin lämpötila celsius-asteina. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (min)	Kahvin lämpötila y (°C)
2	0,0	95
3	1,0	87
4	2,0	80
5	3,0	74
6	4,0	69



Kahvin lämpötilaa (°C) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 94,4692 \cdot 0,9230^x,$$

missä x on seurannan alusta kulunut aika minuutteina.

a) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 10$ (min).

$$f(10) = 94,4692 \cdot 0,9230^{10} = 42,394... \approx 42 \text{ (}^{\circ}\text{C)}$$

Mallin mukaan kahvin lämpötila 10 minuutin kuluttua on noin 42 °C.

b) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 30$ (min).

$$f(30) = 94,4692 \cdot 0,9230^{30} = 8,537... \approx 8,5 \text{ (}^{\circ}\text{C)}$$

Mallin mukaan kahvin lämpötila puolen tunnin kuluttua on noin 8,5 °C.

Vastaus

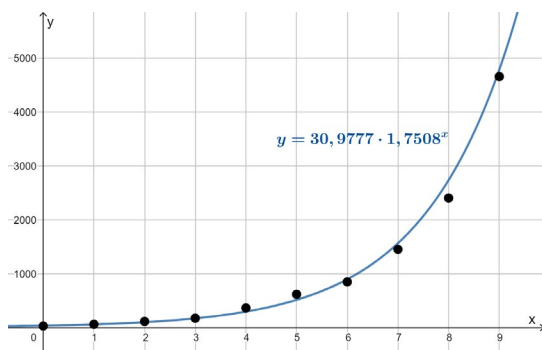
a) 42 °C

b) 8,5 °C

15.6

Muuttuja x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina ja muuttuja y täyssähköautojen lukumäärä. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (v)	Täyssähkö- autojen määrä y (kpl)
2	0	23
3	1	56
4	2	109
5	3	169
6	4	360
7	5	614
8	6	844
9	7	1449
10	8	2404
11	9	4661



Täyssähköautojen määrää (kpl) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 30,9777 \cdot 1,7508^x,$$

missä x on vuodesta 2010 kulunut aika vuosina.

a) Vuonna 2025 vuodesta 2010 on kulunut 15 vuotta.

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 15$ (vuotta).

$$f(15) = 30,9777 \cdot 1,7508^{15} = 137\,910,470\dots \approx 138\,000 \text{ (kpl)}$$

Mallin mukaan Suomessa olisi 138 000 täyssähköautoa tieliikennekäytössä vuonna 2025.

Ennuste voi pitää paikkansa, kun Suomessa vuonna 2019 oli kaikkiaan noin 2,7 miljoonaa henkilöautoa.

b) Vuonna 2035 vuodesta 2010 on kulunut 25 vuotta.

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 25$ (vuotta).

$$f(25) = 30,9777 \cdot 1,7508^{25} = 37\,321\,803,167\dots \approx 37\,300\,000 \text{ (kpl)}$$

Mallin mukaan Suomessa olisi 37 300 000 täyssähköautoa tieliikennekäytössä vuonna 2035.

Ennuste on yli kymmenkertainen verrattuna koko Suomen vuoden 2019 henkilöautomäärään, joten se ei voi pitää paikkaansa.

Vastaus

a) 138 000

Ennuste voi pitää paikkaansa.

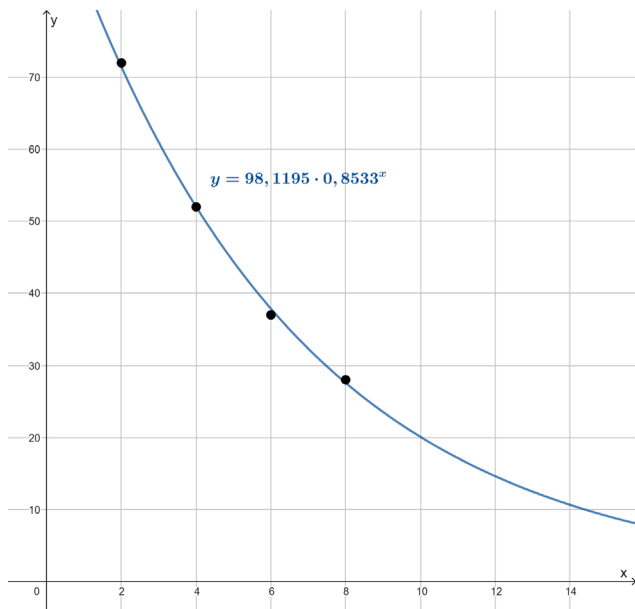
b) 37 300 000

Ennuste ei voi pitää paikkaansa.

15.7

Muuttuja x on muovilevyn paksuus senttimetreinä ja muuttuja y muovilevyn läpäisemä osuus valosta prosentteina. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Muovilevyn paksuus x (cm)	Läpäissyt valo y (%)
2	2,0	72
3	4,0	52
4	6,0	37
5	8,0	28



Muovilevyn läpäisemän valon osuutta (%) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 98,1195 \cdot 0,8533^x,$$

missä x on muovilevyn paksuus senttimetreinä.

a) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 1,0$ (cm).

$$f(1,0) = 98,1195 \cdot 0,8533^{1,0} = 83,725... \approx 84 \%$$

Mallin mukaan 1,0 cm paksun muovilevyn läpi pääsee noin 84 % valosta.

b) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 7,0$ (cm).

$$f(7,0) = 98,1195 \cdot 0,8533^{7,0} = 32,319... \approx 32 \%$$

Mallin mukaan 7,0 cm paksun muovilevyn läpi pääsee noin 32 % valosta.

Vastaus

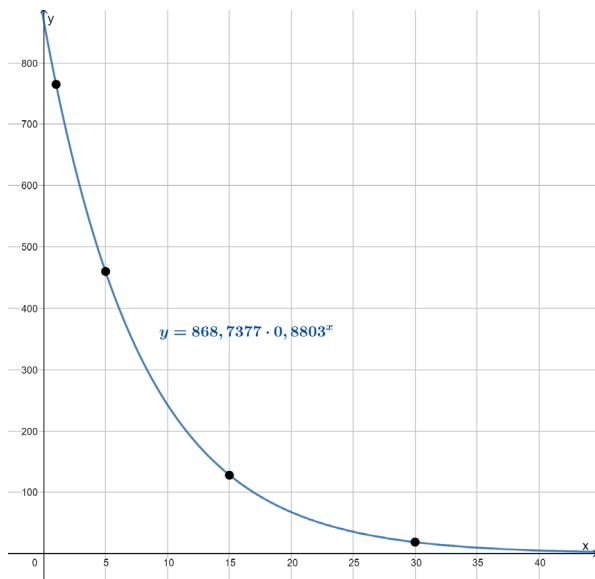
a) 84 %

b) 32 %

15.8

Muuttuja x on lyijylevyn paksuus millimetreinä ja muuttuja y geigermittarin antamien sykäyksien lukumäärä. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Lyijylevyn paksuus x (mm)	Sykäyksiä sekunnissa y (kpl)
2	1,0	765
3	5,0	460
4	15	128
5	30	19



Geigermittarin sykäysten määrää sekunnissa kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 868,7377 \cdot 0,8803^x,$$

missä x on lyijylevyn paksuus millimetreinä.

- a)** Määritetään säteilyn alkuperäinen määrä laskemalla funktion f arvo, kun $x = 0$ (mm).

$$f(0) = 868,7377 \cdot 0,8803^0 = 868,7377 \text{ (kpl)}$$

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 20$ (mm).

$$f(20) = 868,7377 \cdot 0,8803^{20} = 67,84263... \approx 67,8426 \text{ (kpl)}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia 2,0 cm:n lyijylevyn läpäisseen säteilyn määrä on alkuperäisen säteilyn määrästä.

$$\frac{67,8426}{868,7377} = 0,07809... = 7,809... \% \approx 7,8 \%$$

Mallin mukaan 2,0 cm paksun lyijylevyn läpäisee noin 7,8 % säteilystä.

- b) Neljäsosa alkuperäisen säteilyn määrästä on $\frac{868,7377}{4} \approx 217,1844$ sykäystä sekunnissa.

Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on 217,1844 (kpl).

$$f(x) = 217,1844$$

$$f(x) = 868,7377 \cdot 0,8803^x.$$

$$868,7377 \cdot 0,8803^x = 217,1844$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 10,873\dots$$

$$x \approx 11 \text{ (mm)}$$

Mallin mukaan noin 11 mm paksu lyijylevy vähentää säteilyn määrän neljäsosaan alkuperäisestä.

Vastaus

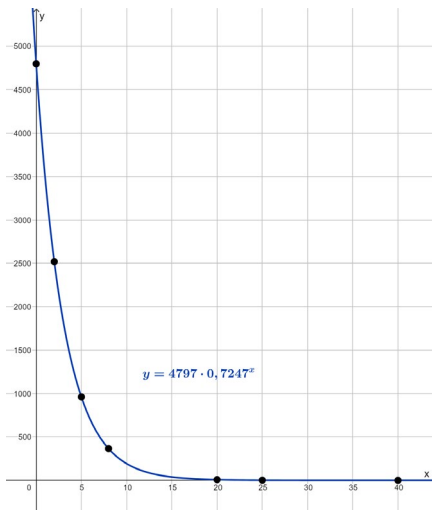
a) 7,8 %

b) 11 mm

15.9

- a) Taulukoidaan mittaustulokset ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

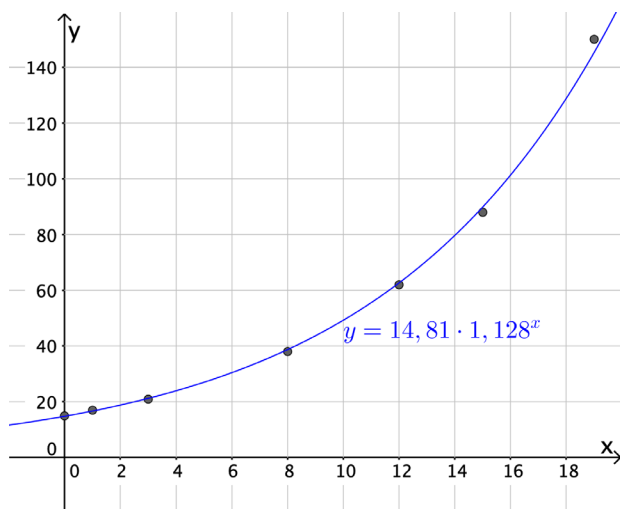
	A	B
1	x	y
2	0	4800
3	2	2520
4	5	961
5	8	366
6	20	7,80
7	25	1,48
8	40	0,0124



Mittaustuloksia kuvaava eksponentiaalinen malli on $f(x) = 4797 \cdot 0,7247^x$.

- b) Taulukoidaan mittaustulokset ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	x	y
2	0	15
3	1	17
4	3	21
5	8	38
6	12	62
7	15	88
8	19	150



Mittaustuloksia kuvaava eksponentiaalinen malli on $f(x) = 14,81 \cdot 1,128^x$.

Vastaus

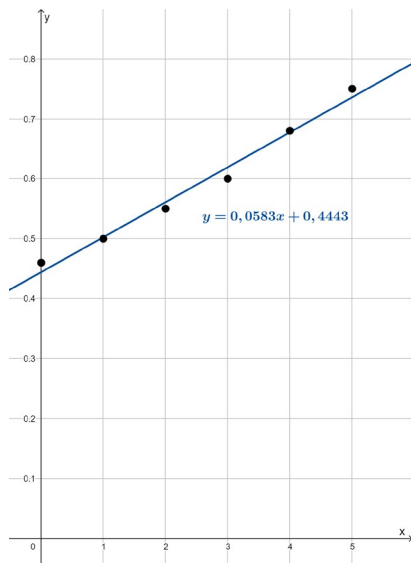
a) $y = 4797 \cdot 0,7247^x$

b) $y = 14,81 \cdot 1,128^x$

15.10

- a) Muuttuja x on vuodesta 2014 kulunut aika vuosina ja muuttuja y Applen osinko dollareina. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon lineaarinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (v)	Osinko y (\$)
2	0	0,46
3	1	0,50
4	2	0,55
5	3	0,60
6	4	0,68
7	5	0,75



Applen osinkoa (\$) kuvaava lineaarinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 0,0583x + 0,4443,$$

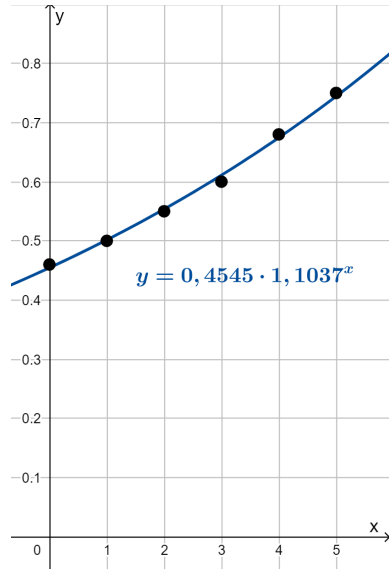
missä x on vuodesta 2014 kulunut aika vuosina.

Sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

Applen osinkoa (\$) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$g(x) = 0,4545 \cdot 1,1037^x,$$

missä x on vuodesta 2014 kulunut aika vuosina.



b) Vuodesta 2014 vuoteen 2025 on kulunut 11 vuotta.

Lasketaan funktioiden f ja g arvot, kun $x = 11$ (vuotta).

Lineaarinen malli $f(x)$:

$$f(11) = 0,0583 \cdot 11 + 0,4443 = 1,0856 \approx 1,1 \text{ (\$)}$$

Eksponentiaalinen malli $g(x)$:

$$g(11) = 0,4545 \cdot 1,1037^{11} = 1,345... \approx 1,3 \text{ (\$)}$$

Lineaarisen mallin mukaan Applen osinko vuonna 2025 olisi 1,1 \$ ja eksponentiaalisen mallin mukaan 1,3 \$.

- c) Ratkaistaan, millä muuttujan x arvoilla funktiot saavat arvon 1,00 (\$).

Lineaarinen malli $f(x)$:

$$\begin{aligned}f(x) &= 1,00 \\0,0583x + 0,4443 &= 1,00 \\x &= 9,531... \\x &\approx 10 \text{ (v)}\end{aligned}$$

$$f(x) = 0,0583x + 0,4443.$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Eksponentiaalinen malli $g(x)$:

$$\begin{aligned}g(x) &= 1,00 \\0,4545 \cdot 1,1037^x &= 1,00 \\x &= 7,992... \\x &\approx 8 \text{ (v)}\end{aligned}$$

$$g(x) = 0,4545 \cdot 1,1037^x.$$

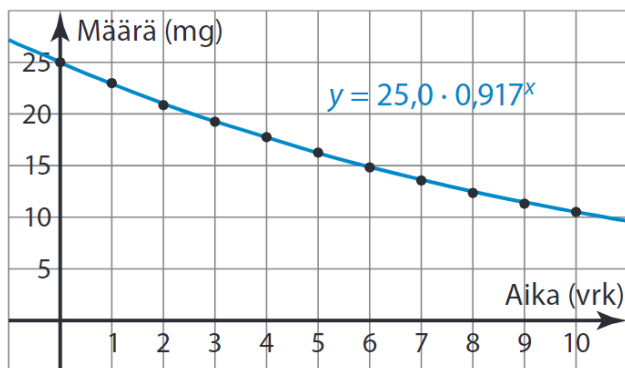
Ratkaistaan CAS-laskimella.

Applen osinko ylittää 1,00 \$ lineaarisen mallin mukaan vuonna $2014 + 10 = 2024$ ja eksponentiaalisen mallin mukaan vuonna $2014 + 8 = 2022$.

Vastaus

- a) $f(x) = 0,0583x + 0,4443$,
 $g(x) = 0,4545 \cdot 1,1037^x$
- b) lineaarinen malli: 1,1 \$,
eksponentiaalinen malli: 1,3 \$
- c) lineaarinen malli: 2024,
eksponentiaalinen malli: 2022

15.11



a) Isotoopin I-131 määrää (mg) kuvaava eksponentiaalinen malli on

$$f(x) = 25,0 \cdot 0,917^x,$$

missä x on seurannan aloittamisesta kulunut aika vuorokausina.

Kolme viikkoa on 21 vuorokautta. Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 21$ (vrk).

$$f(21) = 25,0 \cdot 0,917^{21} = 4,052... \approx 4,1 \text{ (mg)}$$

Mallin mukaan isotooppia on näytteessä noin 4,1 mg, kun seurannan aloittamisesta on 3 viikkoa.

- b)** Kun $x = 0$, niin funktion f arvo on $f(0) = 25,0 \cdot 0,917^0 = 25,0$ (mg). Isotoopin alkuperäinen määrä on siis 25,0 milligrammaa. Täytyy laskea, milloin isotooppia on jäljellä 10 % alkuperäisestä määrästä eli $0,1 \cdot 25,0 = 2,5$ (mg).

Lasketaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on 2,5 (mg).

$$f(x) = 2,5$$

$$25,0 \cdot 0,917^x = 2,5$$

$$x = 26,574\dots$$

$$x \approx 27 \text{ (vrk)}$$

$$f(x) = 25,0 \cdot 0,917^x.$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

Mallin mukaan isotoopin määrä näytteessä on 10 % alkuperäisestä, kun on kulunut noin 27 vuorokautta.

Vastaus

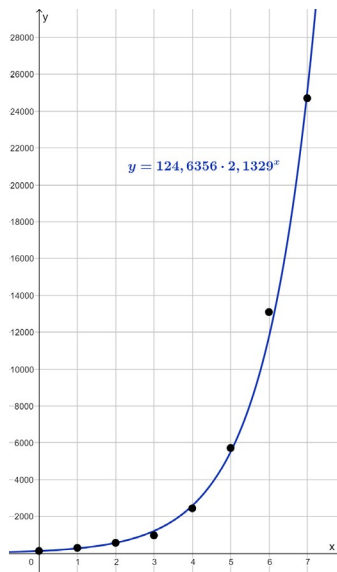
a) 4,1 mg

b) 27 vuorokauden kuluttua

15.12

Muuttuja x on vuodesta 2012 kulunut aika vuosina ja muuttuja y hybridautojen lukumäärä. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (v)	Hybridi- autojen määrä y (kpl)
2	0	128
3	1	296
4	2	569
5	3	973
6	4	2441
7	5	5719
8	6	13 095
9	7	24 704



Hybridautojen määrää (kpl) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 124,6356 \cdot 2,1329^x,$$

missä x on vuodesta 2012 kulunut aika vuosina.

- a) Vuodesta 2012 vuoteen 2023 aikaa on kulunut 11 vuotta.

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 11$ (vuotta).

$$f(11) = 124,6356 \cdot 2,1329^{11} = 517\,985,431... \approx 518\,000 \text{ (kpl)}$$

Mallin mukaan Suomessa olisi 518 000 hybridiautoa tieliikennekäytössä vuonna 2023.

Ennuste voi pitää paikkansa, kun Suomessa vuonna 2019 oli kaikkiaan noin 2,7 miljoonaa henkilöautoa.

- b) Vuodesta 2012 vuoteen 2025 aikaa on kulunut 13 vuotta.

Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 13$ (vuotta).

$$f(13) = 124,6356 \cdot 2,1329^{13} = 2\,356\,451,652... \approx 2\,360\,000 \text{ (kpl)}$$

Mallin mukaan Suomessa olisi 2 360 000 hybridiautoa tieliikennekäytössä vuonna 2025.

Ennuste vaikuttaa liian isolta ottaen huomioon, että Suomessa vuonna 2019 oli kaikkiaan noin 2,7 miljoonaa henkilöautoa.

Vastaus

- a) 518 000

Ennuste voi pitää paikkaansa.

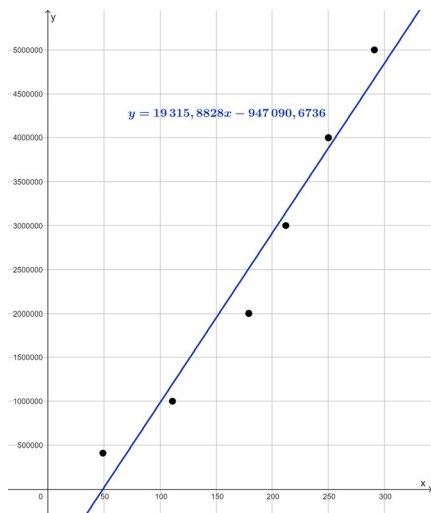
- b) 2 360 000

Ennuste vaikuttaa liian isolta.

15.13

- a) Muuttuja x on vuodesta 1700 kulunut aika vuosina ja muuttuja y Suomen väkiluku. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon lineaarinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (v)	Väkiluku y
2	49	410 400
3	111	1 000 000
4	179	2 000 000
5	212	3 000 000
6	250	4 000 000
7	291	5 000 000



Suomen väkilukua kuvaava lineaarinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 19\,315,8828x - 947\,090,6736,$$

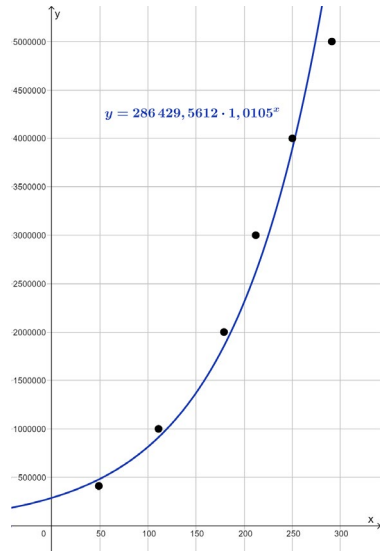
missä x on vuodesta 1700 kulunut aika vuosina.

Sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

Suomen väkilukua kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$g(x) = 286\,429,5612 \cdot 1,0105^x,$$

missä x on vuodesta 1700 kulunut aika vuosina.



b) Vuodesta 1700 vuoteen 2020 on aikaa kulunut 320 vuotta.

Lasketaan funktioiden f ja g arvot, kun $x = 320$ (vuotta).

Lineaarinen malli $f(x)$:

$$\begin{aligned} f(320) &= 19\,315,8828 \cdot 320 - 947\,090,6736 \\ &= 5\,233\,991,822... \\ &\approx 5\,230\,000 \end{aligned}$$

Eksponentiaalinen malli $g(x)$:

$$\begin{aligned}g(320) &= 286\,429,5612 \cdot 1,0105^{320} \\&= 8\,102\,882,665... \\&\approx 8\,100\,000\end{aligned}$$

Lineaarisen mallin mukaan Suomen väkiluku vuonna 2020 olisi ollut 5 230 000 ja eksponentiaalisen mallin mukaan 8 100 000.

- c) Lineaarisen mallin antama ennuste 5 230 000 oli lähempänä Suomen vuoden 2020 todellista väkilukua 5 536 000.

Vastaus

a) $f(x) = 19\,315,8828x - 947\,090,6736,$

$$g(x) = 286\,429,5612 \cdot 1,0105^x,$$

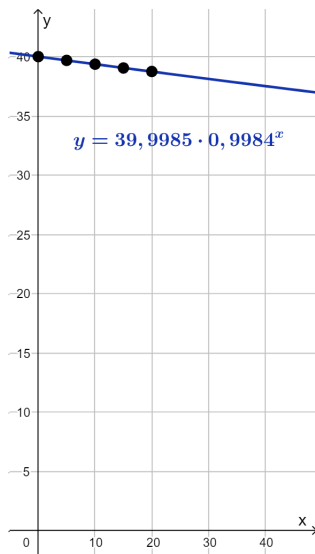
- b) lineaarinen malli: 5 230 000
eksponentiaalinen malli: 8 100 000

- c) lineaarisen mallin

15.14

Muuttuja x on palovaroittimen ikä vuosina ja muuttuja y säteilylähteen aktiivisuus kilobecquereleinä. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (v)	Aktiivisuus y (kBq)
2	0	40,00
3	5	39,68
4	10	39,36
5	15	39,04
6	20	38,74



Säteilylähteen aktiivisuutta (kBq) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 39,9985 \cdot 0,9984^x,$$

missä x on palovaroittimen ikä vuosina.

- a) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 100$ (vuotta).

$$f(100) = 39,9985 \cdot 0,9984^{100} = 34,0801... \approx 34,08 \text{ (kBq)}$$

Lasketaan, kuinka monta prosenttia aktiivisuus on vähentynyt.

$$\frac{40,00 - 34,08}{40,00} = 0,147 = 14,7 \% \approx 15 \%$$

Palovaroittimen aktiivisuus vähenee noin 15 % sadassa vuodessa.

- b) Kun aktiivisuus on vähentynyt 95 %, se on
 $0,05 \cdot 40,00 = 2,00$ (kBq).

Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on
2,00 (kBq).

$$f(x) = 2,00$$

$$f(x) = 39,9985 \cdot 0,9984^x.$$

$$39,9985 \cdot 0,9984^x = 2,00$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 1870,810...$$

$$x \approx 1900 \text{ (v)}$$

Aktiivisuus on vähentynyt 95 %, kun aikaa on kulunut noin 1900 vuotta.

- c) Isotoopin Am-241 puoliintumisaika on se aika, jonka kuluttua aktiivisuus on vähentynyt puoleen Tällöin aktiivisuus on

$$\frac{40,00}{2} = 20,00 \text{ (kBq)}.$$

Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on 20,00 (kBq).

$$f(x) = 20,00$$

$$f(x) = 39,9985 \cdot 0,9984^x.$$

$$39,9985 \cdot 0,9984^x = 20,00$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 432,846...$$

$$x \approx 430 \text{ (v)}$$

Isotoopin Am-241 puoliintumisaika on noin 430 vuotta.

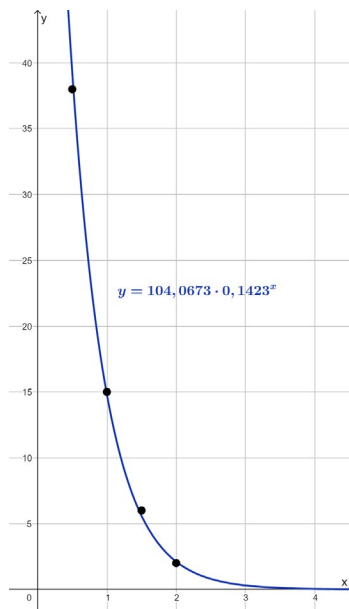
Vastaus

- a) 15 %
- b) 1900 vuoden
- c) 430 vuotta

15.15

Muuttuja x on suodattimen paksuus senttimetreinä ja muuttuja y jäljelle jääneet epäpuhtaudet prosentteina. Lasketaan ja taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Paksuus x (cm)	Jäljellä olevat epäpuhtaudet y (%)
2	0,5	38
3	1,0	15
4	1,5	6
5	2,0	2



Suodatuksen jälkeen jäljelle jääneiden epäpuhtauksien määrää (%) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 104,0673 \cdot 0,1423^x,$$

missä x on suodattimen paksuus senttimetreinä.

- a) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 2,5$ (cm).

$$f(2,5) = 104,0673 \cdot 0,1423^{2,5} = 0,794... \approx 0,8 \text{ (\%)}$$

2,5 cm paksun suodattimen jälkeen epäpuhtauksista on jäljellä noin 0,8 %.

- b) Kun epäpuhtauksista on poistunut 99,9 %, jäljellä on 0,1 %.
Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on 0,1 (%).

$$f(x) = 0,1$$

$$f(x) = 104,0673 \cdot 0,1423^x.$$

$$104,0673 \cdot 0,1423^x = 0,1$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 3,563...$$

$$x \approx 3,6 \text{ (cm)}$$

Kun suodattimen paksuus on noin 3,6 cm, se poistaa 99,9 % epäpuhtauksista.

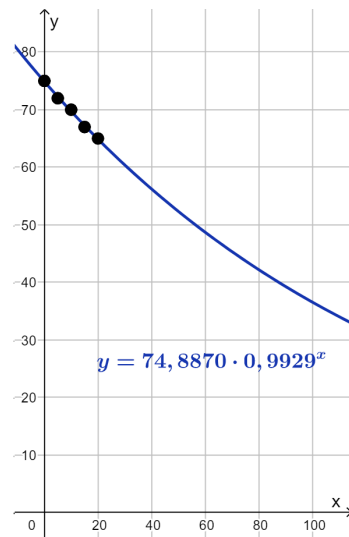
Vastaus

- a) 0,8 %
b) 3,6 cm

15.16

Muuttuja x on seurannan alusta kulunut aika minuutteina ja muuttuja y järiveden ja saunan välinen lämpötilaero celsius-asteina. Lasketaan ja taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B
1	Aika x (min)	Järiveden ja saunan lämpötilaero y (°C)
2	0	75
3	5	72
4	10	70
5	15	67
6	20	65



Järiveden ja saunan lämpötilaeroa (°C) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 74,8870 \cdot 0,9929^x,$$

missä x on seurannan alusta kulunut aika minuutteina.

- a) Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 120$ (min).

$$f(120) = 74,8870 \cdot 0,9929^{120} = 31,846... \approx 32 \text{ (}^\circ\text{C)}$$

Kahden tunnin kuluttua järiveden ja saunan lämpötilan välinen lämpötilaero on noin $32 \text{ }^\circ\text{C}$, joten järiveden lämpötila on $90 \text{ }^\circ\text{C} - 32 \text{ }^\circ\text{C} = 58 \text{ }^\circ\text{C}$.

- b) Kun järiveden lämpötila on $40 \text{ }^\circ\text{C}$, niin saunan ja järiveden välinen lämpötilaero on $90 \text{ }^\circ\text{C} - 40 \text{ }^\circ\text{C} = 50 \text{ }^\circ\text{C}$.

Ratkaistaan, millä muuttujan x arvolla funktion f arvo on $50 \text{ (}^\circ\text{C)}$.

$$f(x) = 50$$

$$f(x) = 74,8870 \cdot 0,9929^x.$$

$$74,8870 \cdot 0,9929^x = 50$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$x = 56,693...$$

$$x \approx 57 \text{ (min)}$$

Järiveden lämpötila on $40 \text{ }^\circ\text{C}$ noin 57 minuutin kuluttua.

Vastaus

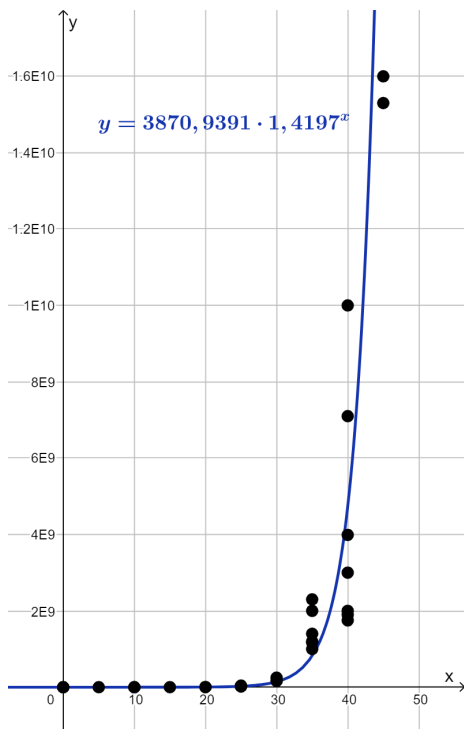
a) $58 \text{ }^\circ\text{C}$

b) 57 minuuttia

15.17

- a) Muuttuja x on vuodesta 1975 kulunut aika vuosina ja muuttuja y mikropiirin transistoreiden lukumäärä. Taulukoidaan havaintoarvot ja sovitetaan pistejoukkoon eksponentiaalinen malli taulukkolaskentaohjelmalla.

	A	B	C
1		Aika x (v)	Transistoreiden lkm y (kpl)
2	1975	0	4258
3	1975	0	4000
4	1975	0	5000
5	1980	5	50000
6	1985	10	275000
7	1985	10	25000
8	1985	10	16000
9	1990	15	1200000
10	1995	20	2500000
11	1995	20	5500000
12	2000	25	21000000
13	2000	25	21000000
14	2000	25	42000000
15	2005	30	169000000
16	2005	30	228000000
17	2005	30	165000000
18	2005	30	250000000
19	2010	35	1000000000
20	2010	35	1170000000
21	2010	35	1200000000
22	2010	35	1400000000
23	2010	35	2000000000
24	2010	35	2300000000
25	2015	40	1750000000
26	2015	40	1900000000
27	2015	40	2000000000
28	2015	40	3000000000
29	2015	40	3990000000
30	2015	40	7100000000
31	2015	40	10000000000
32	2020	45	16000000000
33	2020	45	153000000000



Transistorien lukumäärää (kpl) kuvaava eksponentiaalinen malli neljän desimaalin tarkkuudella sovitettuna on

$$f(x) = 3870,9391 \cdot 1,4197^x,$$

missä x on vuodesta 1975 kulunut aika vuosina.

- b) Vuodesta 1975 vuoteen 2025 on aikaa kulunut 50 vuotta. Lasketaan funktion f arvo, kun $x = 50$ (vuotta).

$$f(50) = 3870,9391 \cdot 1,4197^{50} = 1,576... \cdot 10^{11} \approx 1,58 \cdot 10^{11} \text{ (kpl)}$$

Mallin mukaan transistorien lukumäärä mikropiirissä vuonna 2025 on noin $1,58 \cdot 10^{11}$.

- c) Mooren lain mukaan transistorien lukumäärä kaksinkertaistuu vuodessa. Merkitään muutoskerrointa kirjaimella q . Olkoon transistorien lukumäärä alussa a . Tällöin transistorien lukumäärä kahden vuoden kuluttua on $a \cdot q^2$ ja toisaalta $2a$. Muodostetaan yhtälö ja ratkaistaan muutoskerroin q .

$$a \cdot q^2 = 2a$$

Ratkaistaan CAS-laskimella.

$$q = 1,41421...$$

$$q \approx 1,41$$

Mooren lain mukaan transistorien lukumäärä kasvaa siis noin 41 % vuodessa.

Havaintoarvojen perusteella muodostetun mallin mukaan transistorien lukumäärä kasvaa noin 42 % vuodessa, joten mallin mukaan Mooren laki on pitänyt varsin hyvin paikkansa.

Vastaus

- a) $f(x) = 3870,9391 \cdot 1,4197^x$, missä x on vuodesta 1975 kulunut aika vuosina
b) $1,58 \cdot 10^{11}$
c) Mallin mukaan Mooren laki on pitänyt varsin hyvin paikkansa.